

Зимова школа з системного аналізу і штучного інтелекту

## **ДЕНЬ 2. ЗАДАЧА 1**

# **Системний аналіз та оптимізація розкладу персоналу та резервування ресурсів**

Дніпро  
2024

**Об'єкт дослідження:** Станція технічного обслуговування електромобілів

**Мета:** підвищення ефективності функціонування СТО ЕМ за рахунок оптимального резервування часу обслуговування заявок (відповідно до деякого критерію), а також раціонального розподілу матеріальних і технічних ресурсів

## **Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити *наступні задачі:***

- провести аналіз ситуативних технологічних процесів діагностування ЕМ з використанням системного підходу;
- побудувати математичну модель задачі оптимального резервування часу обслуговування заявки з раціональним розподілом матеріальних і технічних ресурсів станції при одночасному обслуговуванні декількох ЕМ;
- на прикладі розв'язання модельної задачі оптимального резервування часу обслуговування заявки продемонструвати доцільність використання запропонованого підходу щодо складання розкладу роботи СТО

# Постановка задачі

---

СТО надає декілька видів послуг. На ній працює певна **кількість майстрів, автослюсарів, іншого персоналу**. Вона має **декілька дільниць для діагностування ЕМ**. Для надання послуг використовується **обладнання декількох типів**.

Кожен з перерахованих ресурсів (дільниць, робітників, обладнання) має свій власний розклад на наступний тиждень.

**Відомо:** 1) запит клієнта; 2) які ресурси і протягом якого часу використовуються для надання послуги; 3) поточний тижневий розклад кожного ресурсу.

**Потрібно:** для запиту, який надходить для резервування нового сервісу певної тривалості, знайти якомога вигідніший термін надання послуги.

**Критерій оптимальності резервування часу обслуговування може бути різним.**

Наприклад, найближчий можливий термін обслуговування або якомога менша кількість вікон з простою у розкладах певних ресурсів.

# Представлення розкладу ресурсу (автослюсаря, обладнання, тощо)

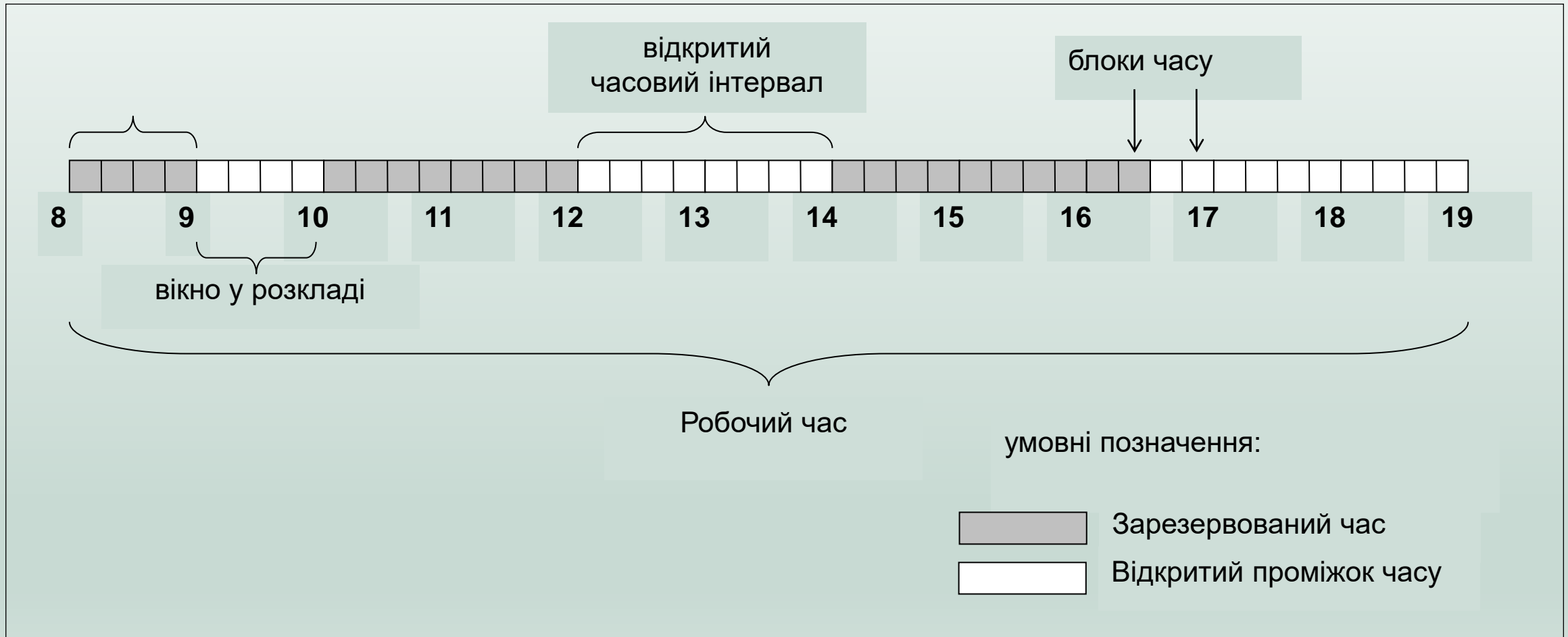
Денний (тижневий) розклад ресурсів будемо представляти **бінарним масивом, розмірність якого дорівнює числу блоків часу ресурсу**. Таке подання розкладу ресурсів є найбільш інтуїтивно зрозумілою структурою даних і зручне для запису математичних моделей оптимізаційних задач, що виникають на практиці для вирішення практичних задач.

Розклади всіх ресурсів розглядаються як окремі об'єкти; **мінімальна одиниця часу** - хвилина; **блок часу** – логічна одиниця часу; блок часу для ресурсу містить  $X$  хвилин (однаковий для всіх ресурсів)

## ПРИКЛАД:

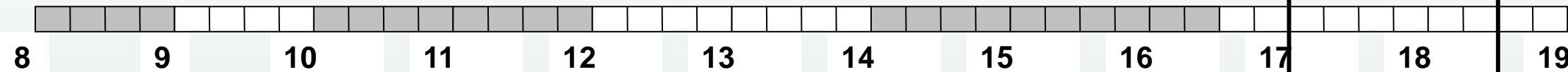
- Розмір блоку часу  **$T_b = 15$  хвилин**; робочий час  **$T_d = 11$  годин  $\times$  60 хвилин = 660 хвилин**; робочий час для ресурсу в блоках часу дорівнює **44 блокам**
- **Робочий день для всіх ресурсів починається о 8 годині ранку і закінчується о 7 годині вечора.**
- Для певного сервісу потрібні 7 ресурсів різних типів
- Денні розклади на наступний день для всіх ресурсів представлені у вигляді бінарних масивів

# Представлення розкладу ресурсу (автослюсаря, обладнання, тощо)

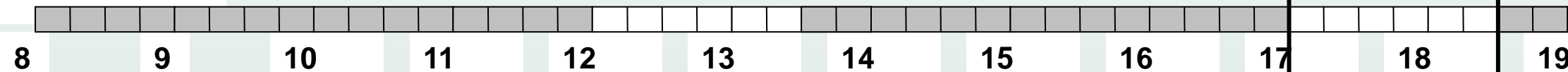


# розклади

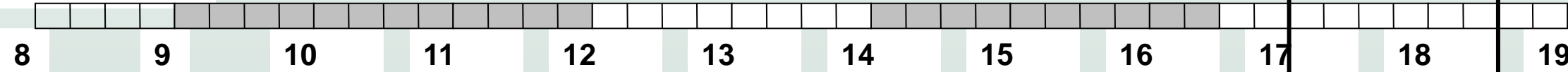
автослюсар 1



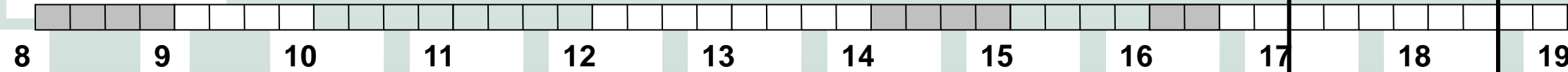
автослюсар 2



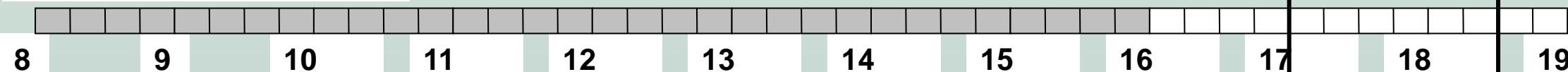
механік 1



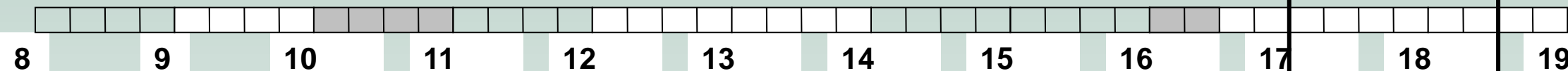
механік 2



Електричне обладнання



Спеціаліст з ПЕОМ



перший синхронний відкритий часовий інтервал



# Вихідні дані

---

Ресурси СТО: 4 автослюсарі, 1 спеціаліст з ПЕОМ, 2 майстри;  
4 дільниці для діагностування ЕМ,  
6 одиниць технологічного обладнання, які призначені для певних процесів діагностування ЕМ.  
3 комплекти діагностичного обладнання, які використовуються одночасно під час надання комплексного сервісу, такого як проходження техогляду або оцінка технічного стану ЕМ

Отже, є **декілька різних типів ресурсів**. СТО надає **6 основних сервісів**.  
Кожен з наведених ресурсів має свій власний розклад роботи на наступний день.







# Технологічні операції діагностування, що надаються на СТО ЕМ в залежності від вимог клієнта



# Технологічні операції діагностування при проходженні техогляду ЕМ

№	Зміст технологічної операції	Матеріальні ресурси	Тривалість, хв.	Задіяні спеціалісти
1.	Органолептичне діагностування транспортного засобу і заповнення діагностичної карти технічного огляду:	дільниця, ПЕОМ	7	Майстер, спеціаліст з ПЕОМ
2.	Перевірка технічного стану вузла рульового управління, кутів установки ведучих коліс	дільниця, стенд перевірки бокового відводу коліс	4	Автослюсар
3.	Перевірка гальмової системи	дільниця, Силовий роликовий гальмівний стенд	4	Автослюсар
4.	Перевірка системи підвішування	дільниця, Комп'ютерний стенд	5	Автослюсар
5.	Перевірка ближнього світла фар, дальнього світла фар, світла протитуманних фар	Стенд ля перевірки і регулювання світла фар	5	Автослюсар
6.	Перевірка технічного стану за допомогою комп'ютерного сканера основних агрегатів, вузлів електромобіля: ємності акумуляторної батареї; функціональності електродвигуна та контролера	Автомобільний OBD сканер з дровою арматурою, з відповідним програмним забезпеченням	5	Майстер, спеціаліст з ПЕОМ
<b>Усього</b>			<b>30</b>	<b>3</b>

# Технологічні операції діагностування при потребі клієнта провести оцінку технічного стану при купівлі або продажу ЕМ

№ п/п	Зміст технологічної операції	Матеріальні ресурси	тривалість, хв.	Задіяні спеціалісти
1.	Органолептичне діагностування транспортного засобу	Дільниця, Товщиномір лако-фарбового покриття	20	Автослюсар; Спеціаліст з ПЕОМ
2.	Перевірка технічного стану вузла рульового управління, кутів установки ведучих коліс	Стенд перевірки бокового відводу коліс	5	Автослюсар
3.	Перевірка гальмової системи	Силовий роликовий гальмівний стенд	5	Автослюсар
4.	Перевірка системи підвішування	Комп'ютерний стенд	5	Автослюсар
5.	Перевірка технічного стану за допомогою комп'ютерного сканера	Автомобільний OBD сканер з дротовою арматурою, з відповідним програмним забезпеченням	25	Автослюсар; Спеціаліст з ПЕОМ
Усього			60	2

## Власнику ЕМ потрібно здійснити техогляд для його продажу

З таблиці 2 видно, що необхідно **2 автослюсаря, майстер, спеціаліст з ПЕОМ, дільниця, товщиномір лакофарбового покриття і автомобільний OBD-сканер з дротовою арматурою, з відповідним програмним забезпеченням.**

Тривалість діагностування дорівнює **60 хвилин (4 блоки часу)** для кожного ресурсу.

**Побудувати математичну модель задачі визначення найскорішого надання послуги клієнту і задіяні ресурси**

# Формалізація постановки задачі

---

**Потрібно** надати на вибір для резервування відкриті тимчасові інтервали розміром  $h$  (тривалість послуги) в порядку пріоритетів. Найвищий пріоритет надається часового інтервалу, який, будучи зарезервованим, «поліпшить» розклад з точки зору певної цільової функції.

**Критерії оптимальності :**

- дата і час першого синхронного відкритого часового інтервалу для всіх ресурсів різних типів, що мають бути задіяні для найскорішого надання нового сервісу з діагностування ЕМ;
- мінімізувати сумарну тривалість вікон у розкладах всіх ресурсів.

*Очевидно, що дана задача може бути вирішена **шляхом повного перебору відкритих тимчасових інтервалів всіх ресурсів** діагностування ЕМ.*

*Однак, **зі збільшенням кількості ресурсів**, які можуть надавати сервіс, такий **перебір буде уповільнюватися**.*

*Тому, виникає **необхідність поліпшення алгоритму пошуку шляхом або оптимізації представлення даних розкладу** (наприклад, шляхом індексації цих даних), або оптимізації стратегії пошуку, або спільного використання обох підходів*

# Математична модель

Введемо наступні позначення:

$N$  – число типів ресурсів,

$D_p$  – число ресурсів  $p$ -го типу,

$n$  – число часових інтервалів - кількість блоків часу (по 15 хвилин) в денному розкладі.

Поточний розклад  $i$ -ого ресурсу  $p$ -ого типу представимо у вигляді вектору:

$$R_i^p : R_i^p = \{r_{ij}^p\}, p = 1, \dots, N; \quad i = 1, \dots, D_p; j = 1, \dots, n$$

де

$$r_{ij}^p = \begin{cases} 0 & \text{— якщо } j \text{ інтервал є відкритим,} \\ 1, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}$$



## Параметри послуги (запиту) (будемо вважати, що запитів може бути декілька):

$k$  – порядковий номер запиту.

$A_k$  – набір ресурсів, що мають бути задіяні для надання послуги:

$$A_k = \{a_{kp}\}, p = 1, \dots, N \quad 0 < a_{kp} \leq D_p$$

$a_{kp}$  – число ресурсів  $p$ -го типу, яке потрібне для надання послуги.

$[l_k, m_k]$  – границі часового інтервалу, протягом якого (за можливістю) має бути здійснений сервіс:

$$1 \leq l_k < m_k \leq n$$

$h_k$  – тривалість сервісу у блоках часу (дорівнює **[кількість хвилин/10]+1**).

Обчислимо величину  $G_k$  – число всіх можливих комбінацій ресурсів всіх типів, що можуть задовольнити послугу  $A_k$ :

$$G_k = \prod_{p:a_{kp}>0} C_{D_p}^{a_{kp}}$$

**(число  $G_k$  можна зменшити, враховуючи лише ті ресурси, котрі мають у розкладі відкритий інтервал тривалості  $h_k$  (хоча б один) протягом  $[l_k, m_k]$ ).**

Для кожної групи ресурсів  $q_k = 1, \dots, G_k$ , введемо вектор  $T^q$  зайнятості ресурсів у групі  $q$  для надання діагностичного сервісу за відповідним регламентом  $A_k$ :

$$T^{q_k} = \{t_i^{q_k, p}\}, p = 1, \dots, N; \quad i = 1, \dots, D_p; \quad q_k = 1, \dots, G_k$$

$$t_i^{q_k, p} = \begin{cases} 1 - \text{якщо } i - \text{ий ресурс } p - \text{го типу} \\ \text{приймає участь в групі з номером } q_k, \\ 0, \text{ у протилежному випадку} \end{cases}$$

$$T^{q_k}: \sum_{i=1}^{D_p} t_i^{q_k, p} = a_{kp} \quad \text{для всіх } p \text{ та } q_k$$

Для кожного варіанту вибору ресурсів  $T^{q_k}$  складемо вектор:

$$S^{q_k} = \bigcup_{p, i: t_i^{q_k, p} = 1} R_i^p \quad S_j^{q_k} = \begin{cases} 0 - \text{якщо } j - \text{ий блок часу "команди"} \\ q_k \text{ відкритий,} \\ 1, \text{ у протилежному випадку} \end{cases}$$

**Фактично  $S^{q_k}$  – це денний розклад групи ресурсів  $T^{q_k}$**

Для  $q_k = 1, \dots, G_k$  знайдемо масив

$$f^{q_k} = (f_1^{q_k}, f_2^{q_k}, \dots, f_s^{q_k})$$

елементи якого відповідатимуть номерам блоків часу, починаючи з яких можна здійснювати надання послуги  $A_k$  групою ресурсів  $T^{q_k}$ :

$$l_k \leq f_r^{q_k} \leq m_k: \quad s_{f_r^{q_k}}^{q_k} + s_{f_r^{q_k}+1}^{q_k} + \dots + s_{f_r^{q_k}+h_k-1}^{q_k} = 0, \quad r = 1, \dots, s$$

Тоді задача пошуку найближчих можливих термінів обслуговування  $K$  клієнтів запишеться у такий спосіб:

**Задача 1.** Для кожного  $k$ -го запиту,  $k = 1, \dots, K$ , (у порядку їх надходження) необхідно знайти перший найближчий до часу, що передбачений запитом як початок надання послуги  $l_k$ , елемент масиву  $f^{q_k}$ :

$$f_*^k \rightarrow \min_{q_k} \min_r f_r^{q_k}$$

Якщо масив  $f^{q_k}$  - порожній, то неможливо надати послугу  $A_k$  групою ресурсів  $T^{q_k}$

Нехай  $(f^{q_k})^*$  – вектор  $f^{q_k}$ , відсортований у порядку зростання сумарного розміру вікон.

Позначимо через  $w^{p,i}$  – сумарний розмір вікон у розкладі  $i$ -го ресурсу  $p$ -го типу, а через  $w_{f_r^{q_k}}^{p,i}$  – сумарний розмір вікон у розкладі  $i$ -го ресурсу  $p$ -го типу після того, як у ньому був закритий проміжок розміром  $h_k$  з початком в  $f_r^{q_k}$

Тоді для всіх  $f_r^{q_k}$  що знайдені в **задачі 1**, можна обчислити величину:

$$\Delta_r^{q_k} = \sum_{p,i:t_i^{q_k,p}=1} w_{f_r^{q_k}}^{p,i}$$

**В задаче 2, критерієм має бути не сумарний розмір вікон для певного ресурсу чи для всіх ресурсів, а кількість вікон. Чи так?**

і можна записати задачу мінімізації сумарних вікон у розкладах всіх ресурсів.

**Задача 2.** Для кожного  $k$ -го запиту,  $k = 1, \dots, K$ , (у порядку їх надходження) знайти:

$$\Delta_*^k \rightarrow \min_{q_k} \min_r \Delta_r^{q_k}$$

## Реалізація моделі на прикладі: Запит з діагностування

З таблиці 2 видно, що необхідно **2 автослюсаря, спеціаліст з ПЕОМ, майстер, дільниця, товщиномір лакофарбового покриття, автомобільний OBD-сканер з дротовою арматурою, з відповідним ПЗ.**

**Тривалість діагностування дорівнює 60 хвилин (4 блоки часу) для кожного ресурсу.**

### Параметри побудованої моделі:

$$N = 7,$$

$$D_1 = 4, D_2 = 1, D_3 = 4, D_4 = 2; D_5 = 1, D_6 = 5, D_7 = 3;$$

$$n = 44;$$

$$K = 1;$$

$A_1 = \{2, 1, 1, 1, 1, 0, 1\}$  – необхідне число ресурсів відповідного типу;

$[l_1, m_1] = [1, n]$  - границі тимчасового інтервалу, протягом якого потрібно здійснити відповідний сервіс (якщо не заданий спочатку, передбачається рівним часовому інтервалу денного розкладу);

$h_1 = 4$  – кількість послідовних блоків часу, які передбачені послугою

## Допоміжні дані:

число всіх можливих комбінацій ресурсів, які можуть надати послугу:

$$Q_1 = C^2_4 C^1_1 C^1_4 C^1_2 C^1_1 C^0_5 C^1_3 = 108.$$

Якщо виключити з розгляду ті ресурси, які не мають в розкладі жодного вікна розміром, що більше або дорівнює  $h_1$  (в прикладі це ресурси  $R^3_2, R^4_2, R^6_1; R^7_1$ ), то

$$Q_1 = C^2_4 C^1_1 C^1_3 C^1_1 C^1_1 C^0_4 C^1_2 = 4 \times 3 \times 2 = 24,$$

що суттєво менше за попереднє значення.

Далі складаємо вектори участі ресурсів в «команді»  $T^q, q = 1, \dots, 24$ .

Якщо усі ресурси записати в рядок, то матриця  $T$  буде мати розмірність

$$Q_1 \times (D_{11} + D_{12} + D_{13} + D_{14} + D_{15} + D_{17}) = 24 \times (4 + 1 + 3 + 1 + 1 + 2).$$

Тут через  $D_{1i}$  позначено число ресурсів  $i$ -го типу, що мають хоча б одне вікно потрібного розміру.

**Отже, рядку матриці  $T$  буде відповідати певний склад «команди»:**

T: №	$R^1_1$	$R^1_2$	$R^1_3$	$R^1_4$	$R^2_1$	$R^3_1$	$R^3_3$	$R^3_4$	$R^4_1$	$R^5_1$	$R^7_2$	$R^7_3$
1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
2	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1
3	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
...												
24	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1

Для кожного варіанту вибору ресурсів  $T^q$ ,  $q = 1, \dots, 24$  складаємо вектор  $S^q$ :

$$\begin{aligned} S^1 = & 111100001111111100000000111111111000000000 \quad \checkmark \\ & 1111111111111111000000111111111111100000011 \quad \checkmark \\ & 11000000011000000000000110000001100000000110 \quad \checkmark \\ & 00000000111100000000000000000000000000000000 \quad \checkmark \\ & 1111000011111111000000001111111110000001000 \quad \checkmark \\ & 1110000011111111111111111111111100000000010 \quad \checkmark \\ & \underline{111100000111110000000011111000000000011000} = \\ & 111111111111111111111111111111111111100011111 \end{aligned}$$

$$f^1 = \emptyset,$$

$$\begin{aligned} S^* = & 111100001111111100000000111111111000000000 \quad \checkmark \\ & 0000000000000000000000000000000000000001111110 \quad \checkmark \\ & 11000000011000000000000110000001100000000110 \quad \checkmark \\ & 00000000111100000000000000000000000000000000 \quad \checkmark \\ & 1111000011111111000000001111111110000001000 \quad \checkmark \\ & 1110000011111111111111111111111100000000010 \quad \checkmark \\ & \underline{111100000111110000000011111000000000011000} = \\ & 1111000011111111111111111111111110011111110 \end{aligned}$$

$$f^* = \{5\}$$



$S^{24} =$  000000000000000000000000000000000000111111110 √  
 111111111111111110000000000000001111111111100 √  
 11000000011000000000000110000001100000000110 √  
 111100000000000000000000011110000110000011000 √  
 11110000111111110000000011111111110000001000 √  
 1110000011111111111111111111111100000000010 √  
0000000011110000111100000000000110000100011 =  
 111111111111111111111111111111111111100011111

$f^{24} = \emptyset$

Перебираючи всі початкові елементи масивів  $f^1, \dots, f^{24}$ , знаходимо найменший, він і буде вказувати номер блоку, починаючи з якої ділянки можна надати послугу.

Індекс  $x$  масиву  $f^x$ , якому належить знайдений номер, визначає склад команди, тобто ті ресурси СТО, які мають бути задіяні під час надання послуги.

Якщо таких індексів кілька, можна видавати всі склади команд (для можливості вибору команди клієнтом) або ввести критерій якості (як то мінімальний сумарний розмір вікон у розкладі конкретного ресурсу).

Отже, в розглянутому прикладі найближчий час надання послуги 9.00, і ресурси, які при цьому будуть задіяні, такі:  $R^1_1, R^1_3, R^2_1, R^3_1, R^4_1, R^5_1, R^7_3$ .

# Приклад 2

---

В клініці працюють: **5 хірургів, 7 медсестер**, інший медичний персонал;  
Є **3 операційні кімнати, 5 пристроїв для анестезії**, друге обладнання.

Розклад кожного ресурсу складений на наступні 90 днів. Блок часу в розкладах в клініці дорівнює 15 хв.

**Запит:** певна операція тривалістю 90 хвилин (**6 блоків** по 15 хвилин) .  
Потрібно **2 хірурги, 2 медсестри, 1 операційна кімната і 1 пристрій для анестезії**.

**Необхідно** знайти найближчу дату і час (починаючи з поточного дня), ресурси для виконання запиту

# Розклади ресурсів для прикладу 2

---

## Тип 1: хirurg

Ресурс 1: 111100001111111000000001111111110000000000 (R<sub>1</sub><sup>1</sup>)  
Ресурс 2: 111111111111111000000111111111111100000011 (R<sub>2</sub><sup>1</sup>)  
Ресурс 3: 0011111110 (R<sub>3</sub><sup>1</sup>)  
Ресурс 4: 11111111111111100000000000000001111111111100 (R<sub>4</sub><sup>1</sup>)  
Ресурс 5: 11111111111111111111111111111000000000100 (R<sub>5</sub><sup>1</sup>)

## Тип 2: медсестра

Ресурс 6: 00000000111100000000000000000000000000000000000000 (R<sub>1</sub><sup>2</sup>)  
Ресурс 7: 000011111111111000110001111111110000111100 (R<sub>2</sub><sup>2</sup>)  
Ресурс 8: 000011111111111000000001111111110000000000 (R<sub>3</sub><sup>2</sup>)  
Ресурс 9: 111100000000000000000000000011110000110000011000 (R<sub>4</sub><sup>2</sup>)  
Ресурс 10: 111100001111111000000001111111110000001000 (R<sub>5</sub><sup>2</sup>)  
Ресурс 11: 11 (R<sub>6</sub><sup>2</sup>)  
Ресурс 12: 11100 (R<sub>7</sub><sup>2</sup>)

## Тип 3: операційна

Ресурс 13: 111111111111111111111111111111111000000000010 (R<sub>1</sub><sup>3</sup>)  
Ресурс 14: 1111000000111110000000011111000000000011000 (R<sub>2</sub><sup>3</sup>)  
Ресурс 15: 00000000111100001111000000000000110000100011 (R<sub>3</sub><sup>3</sup>)

## Тип 4: пристрій для анестезії

Ресурс 16: 11 (R<sub>1</sub><sup>4</sup>)  
Ресурс 17: 000000001111000000000000000000000000000000000000000 (R<sub>2</sub><sup>4</sup>)  
Ресурс 18: 011100 (R<sub>3</sub><sup>4</sup>)  
Ресурс 19: 111000000110000 (R<sub>4</sub><sup>4</sup>)  
Ресурс 20: 0000000011110000011111100000000110000000111 (R<sub>5</sub><sup>4</sup>)

1. Визначити параметри моделі
2. Оцінити кількість можливих команд ресурсів
3. Скласти матрицю участі ресурсів у командах
4. Скласти розклади команд
5. Знайти найближчий термін надання послуги

# Приклад 2. Результати

---

# Висновки

---

У результаті виконання завдання:

- здійснена систематизація даних о плавках;
- побудовано конструктивну математичну модель задачі складання оптимального розкладу і резервування ресурсів;
- Проведений аналіз результатів обчислювальних експериментів.